UNIVERSITE DES LAGUNES - FAST L1 L1 — Année Académique

UE Probabilités - Semestre 2 — 2020-2021

`TD de Probabilités : Fiche 3`

Exercice 1

Soit X une variable aléatoire d'ensemble de valeurs possibles $X(\Omega) = \{-1, 0, 1, 2\}$ et de loi de probabilités définie par : $\mathbb{P}(X=-1) = \mathbb{P}(X=1) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(X=0) = \frac{1}{3}$ et $\mathbb{P}(X=2) = \alpha$.

(1) Trouver la valeur de α.

(2) Donner la fonction de répartition de X.

Exercice 2 (**)

Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition définie par :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < -2 \\ \frac{1}{3}, & \text{si } -2 \le x < -1 \\ \frac{1}{2}, & \text{si } -1 \le x < 0 \\ \frac{7}{12}, & \text{si } 0 \le x < 1 \\ \frac{3}{4}, & \text{si } 1 \le x < 2 \\ 1, & \text{si } x \ge 2. \end{cases}$$

(1) Calculer les probabilités suivantes : $\mathbb{P}(X \ge -1)$, $\mathbb{P}(X < 1)$ et $\mathbb{P}(-1 < X \le 1)$.

(2) Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.

Exercice 3 (**)

Trois coups sont successivement tirés sur une cible. Les probabilités d'atteinte de la cible sont respectivement $0,3$ pour le 1er coup, $0,5$ pour le 2ème et $0,7$ pour le 3ème. On note X le nombre de fois la cible a été atteinte.

(1) Donner la loi de X, puis Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.

(2) Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$

(3) Donner la fonction de répartition de X.

Exercice 4 (**)

On propose le jeu suivant: On tire sans remise 7 boules dans une urne en contenant 10 dont 6 noires et 4 rouges. Soit X le nombre de boules rouges tirées.

(1) Donner la loi de X, puis calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.

(2) On suppose que chaque boule rouge tirée fait gagner 250 F et chaque boule noire tirée fait perdre 100 F. On désigne par Y le gain à l'issue du jeu.

   (a) Exprimer Y en fonction de X. En déduire la loi de Y, $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathrm{Var}(Y)$.

   (b) Quelle est la probabilité de gagner au moins quelque chose ?

(3) Mêmes questions si on tire les 7 boules avec remise.

Exercice 5 (**)

On lance trois fois de suite une pièce de monnaie. On désigne par X le nombre de piles obtenus.

(1) Déterminer la loi de X.
(2) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.
(3) Déterminer la fonction de répartition de X.

Exercice 6 (**)

Une urne contient 6 boules dont 2 noires et 4 rouges. On tire une boule de l'urne; si elle noire, on la remet dans l'urne et tire à nouveau une boule. On repète l'épreuve jusqu'à ce qu'on obtienne une boule rouge. On désigne par X le nombre de tirages nécessaires.

(1) Donner la loi de X.
(2) Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\text{Var}(X)$
(3) Calculer la probabilité qu'on ait besoin de plus d'un tirage.
   (a) Cette fois ci, on repète l'épreuve jusqu'à ce qu'on obtienne 5 boule rouge et on note Y le nombre de tirages nécessaires.
   (b) Donner la loi de Y.
   (c) Calculer $\mathbb{E}(Y)$ et $\text{Var}(Y)$
   (d) Calculer la probabilité qu'on ait besoin de plus de 7 tirages.

Exercice 7

Le nombre d'accidents hebdomadaires à un croisement donné peut être modélisé par une variable X suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(1)$.

(1) Calculer la probabilité qu'une semaine donnée on n'enregistre aucun accident.
(2) Calculer la probabilité qu'une semaine donnée on enregistre au plus trois accidents.
(3) Sachant qu'une année comporte 52 semaines, déterminer le nombre moyen de semaines sans accident au cours d'une année.

Exercice 8

La durée de vie X en années d'une télévision suit une loi exponentielle de paramètre $\theta = \frac{1}{8}$.

(1) Calculer la probabilité que la télévision que vous venez d'acheter ait une durée de vie supérieure à 8 ans.
(2) Vous possédez une telle télévision depuis 2 ans. Quelle est la probabilité que sa durée de vie soit encore de 8 ans à partir de maintenant ? Conclusion.
(3) Quelle est la durée de vie moyenne d'une télévision? Et la variance de cette durée de vie?

Exercice 9

Dans une population, on définit la variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée par la densité de probabilité suivante:

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{x^2}{2}}, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

(1) Vérifier que f est une densité de probabilité.

(2) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $Y = X^2$.

(3) Calculer l'espérance et la variance de Y.

Exercice 10

On a observé dans une population que 30% des personnes entrent dans le monde professionnel avant 20 ans et que 55% d'entre elles y parviennent avant leur 24 ans. En supposant que l'âge d'entrer dans le monde professionnel suit une loi normale, quelle est la probabilité, pour une personne, le jour de ses 25 ans, de n'être toujours pas entrée dans le monde professionnel ?

Exercice 11

Soit X une variable aléatoire de densité : $f(x) = ax^3e^{-2x}$, si $x \geq 0$ et $f(x) = 0$, sinon.

(1) Déterminer la valeur de a.

(2) Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 12 (**)

Le central téléphonique de la société X reçoit en moyenne 180 appels par heure. On suppose que le central ne peut prendre qu'un seul appel à la fois.

(1) Calculer la probabilité pour que, durant 3 minutes, le central reçoive exactement 5 appels.

(2) Vous attendez depuis une minute sans appel. Quelle est la probabilité que vous devriez attendre encore 2 minutes pour recevoir le premier appel à partir de maintenant?

(3) On note T le temps d'attente entre le premier et le cinquième appels reçus par le central. Donner la loi de T, déterminer sa densité, ainsi que son espérance et sa variance.